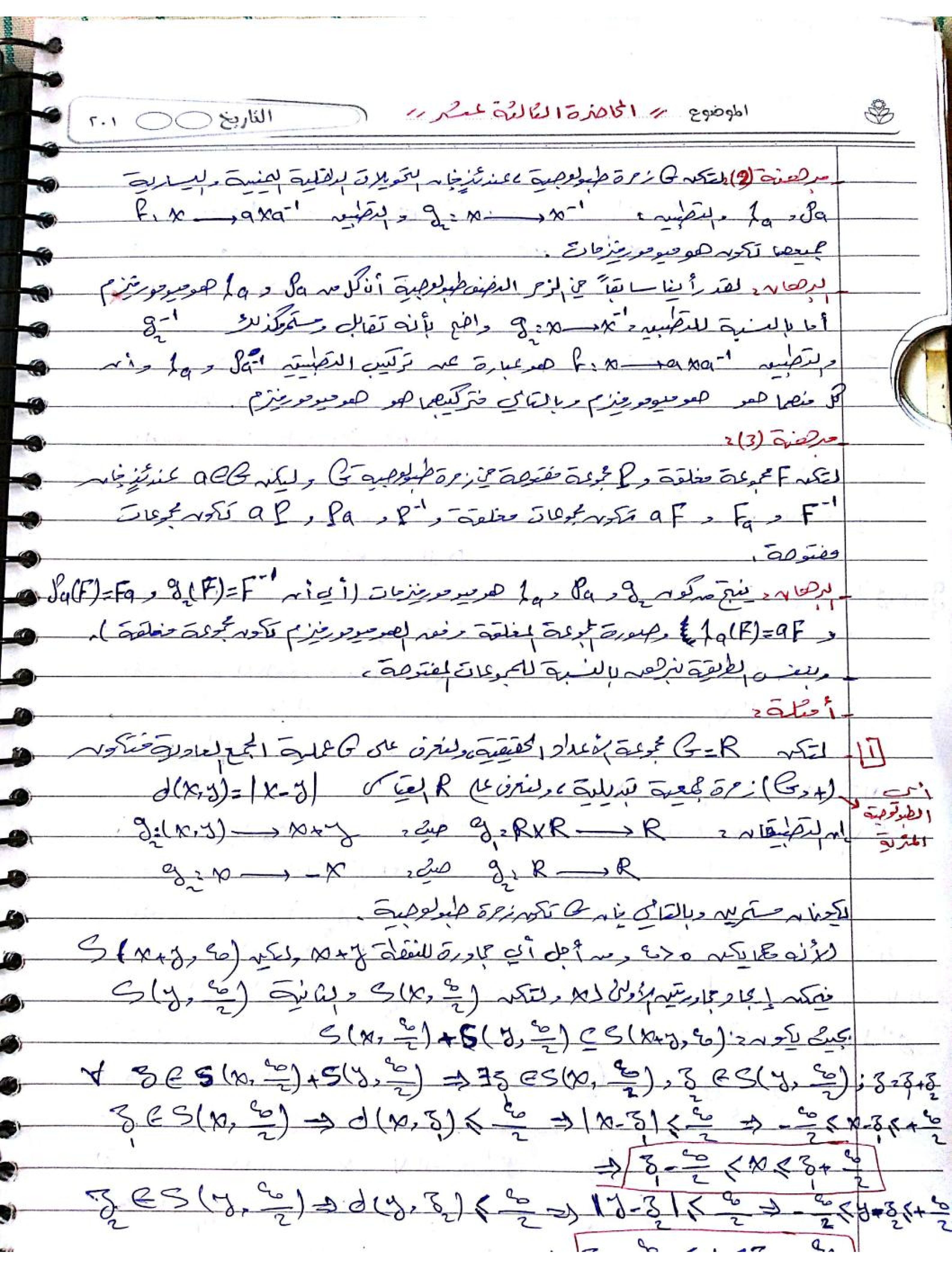


ملاحظة (2): لتكن G زمرة طبولوجية عندئذٍ فإن التحويلات الداخلية اليمنية واليسارية δ_a ، ℓ_a والتطبيق $g_2: x \to x^{-1}$ والتطبيق $f: x \to axa^{-1}$ جميعها تكون هوميومورفيزمات.

البرهان: لقد رأينا سابقاً في الزمر الطبولوجية أن كل من δ_a و ℓ_a هوميومورفيزم، أما بالنسبة للتطبيق $g_2: x \to x^{-1}$ واضح بأنه تقابل ومستمر وكذلك g_2^{-1} والتطبيق $f: x \to axa^{-1}$ هو عبارة عن تركيب التطبيقتين $\delta_{a^{-1}}$ و ℓ_a وبما أن كل منهما هو هوميومورفيزم وبالتالي فتركيبهما هو هوميومورفيزم.

ملاحظة (3):

لتكن F مجموعة مغلقة و P مجموعة مفتوحة في زمرة طبولوجية G وليكن $a \in G$ عندئذٍ فإن F^{-1} و Fa و aF تكون مجموعات مغلقة و P^{-1} و Pa و aP تكون مجموعات مفتوحة.

البرهان: ينتج مما سبق كون g_2 و δ_a و ℓ_a هوميومورفيزمات (أي أن $g_2(F)=F^{-1}$ و $\delta_a(F)=Fa$ و $\ell_a(F)=aF$ وصورة المجموعة المغلقة وفق الهوميومورفيزم تكون مجموعة مغلقة). وبنفس الطريقة نبرهن بالنسبة للمجموعات المفتوحة.

أمثلة:

[1] لتكن $G=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف على G عملية الجمع العادية فتكون $(G,+)$ زمرة جمعية تبديلية، ولنعرف على R القياس $d(x,y)=|x-y|$ (نأخذ الطبولوجية المترية)

إن التطبيقات: $g_1: R\times R \to R$ حيث $g_1:(x,y) \to x+y$

$g_2: R \to R$ حيث $g_2: x \to -x$

تكونان مستمرين وبالتالي فإن G تكون زمرة طبولوجية.

لأنه مهما يكن $\varepsilon>0$ ومن أجل أي مجاورة للنقطة $x+y$ ولتكن $S(x+y,\varepsilon)$ فيمكن إيجاد مجاورتين الأولى لـ x ولتكن $S(x,\frac{\varepsilon}{2})$ والثانية $S(y,\frac{\varepsilon}{2})$ بحيث يكون: $S(x,\frac{\varepsilon}{2})+S(y,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq S(x+y,\varepsilon)$

$$\forall z \in S(x,\tfrac{\varepsilon}{2})+S(y,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \exists z_1 \in S(x,\tfrac{\varepsilon}{2}),\ z_2 \in S(y,\tfrac{\varepsilon}{2});\ z=z_1+z_2$$

$$z_1 \in S(x,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(x,z_1)<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x-z_1|<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2}<x-z_1<+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow z_1-\tfrac{\varepsilon}{2}<x<z_1+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$z_2 \in S(y,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(y,z_2)<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |y-z_2|<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2}<y-z_2<+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

- جمع العلاقتين: $z_1 + z_2 - \varepsilon < x+y \leq z_1 + z_2 + \varepsilon \Rightarrow$

$z - \varepsilon \leq x+y \leq z + \varepsilon \Rightarrow$

$-\varepsilon \leq x+y-z \leq +\varepsilon \Rightarrow |(x+y)-z| < \varepsilon \Rightarrow$

$d(x+y, z) < \varepsilon \Rightarrow z \in S(x+y, \varepsilon)$

أي أن $S(x, \frac{\varepsilon}{2}) + S(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq S(x+y, \varepsilon)$

أي أن g_1 مستمر.

- لتكن S جوارة لـ $-x$ أي $S(-x, \varepsilon)$ ولنأخذ جوارة للنقطة x ولتكن $S(x, \varepsilon)$ بحيث يكون $S(x, \varepsilon) \subseteq S(-x, \varepsilon)$

$\forall y \in -S(x, \varepsilon) \Rightarrow \exists x_1 \in S : y = -x_1$

$x_1 \in S \Rightarrow |x - x_1| < \varepsilon \Rightarrow x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon$

$-x_1 + \varepsilon > -x > -x_1 - \varepsilon \Rightarrow -x_1 - \varepsilon < -x < -x_1 + \varepsilon \Rightarrow$

$y - \varepsilon < -x < y + \varepsilon \Rightarrow |-x - y| < \varepsilon \Rightarrow d(-x, y) < \varepsilon$

$\Rightarrow y \in S(-x, \varepsilon)$

- وبالتالي فإن g_2 تطبيق مستمر.

- [2] $G = R^*$ مع الضرب العادي والطبولوجية المترية تكون زمرة طبولوجية.

أي ينبغي أن نبرهن استمرار:

$g_1 : R^* \times R^* \longrightarrow R^*$ ، $(x, y) \longrightarrow xy$

$g_2 : R^* \longrightarrow R^*$ ، $x \longrightarrow x^{-1} = \frac{1}{x}$

- [3] لتكن G زمرة جبرية مع الطبولوجية القوية عندئذٍ فإنه من أجل أي مجموعة مفتوحة W للعنصر xy^{-1} فإن $\{x\}$ تكون جوارة للعنصر x و $\{y\}$ تكون جوارة للعنصر y ويكون $\{x\}\{y\}^{-1} = \{xy^{-1}\} \subseteq W$

وبالتالي فإن G تكون زمرة طبولوجية.

أي ينبغي أن نبرهن استمرار g_3:

$g_3 : G \times G \longrightarrow G$ ، $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$

$g_3 : (x, y) \longrightarrow xy^{-1}$

$(\{x\} \times \{y\}) = \{x\}\{y\}^{-1} = \{x\}\{y^{-1}\} = \{xy^{-1}\} \subseteq W$

- جملة مجاورات العنصر الحيادي:

- تعريف:

ندعو المجموعة الجزئية U من الزمرة الطبولوجية G تناظرية اذا كان $U^{-1}=U$ وفي حالة كانت الزمرة جمعية تكون U تناظرية اذا كان $-U=U$.

دورة - مبرهنة (4):

كل زمرة طبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{U\}$ لمجاورات العنصر الحيادي e .

- البرهان:

لتكن $\{V\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e ، بما أن $e=e^{-1}$ وأن g_2 هوميومورفيزم عندئذٍ من أجل $V\in\{V\}$ يكون V^{-1} مجاورة مفتوحة للعنصر الحيادي e ، فإذا أخذنا $U=V\cap V^{-1}$ فإن U تكون مجاورة متناظرة للعنصر e وذلك لأن:

$$U^{-1}=V^{-1}\cap V=U$$

بما أن كل مجاورة V تحوي مجاورة متناظرة U ينتج أن $\{U\}$ تشكل جملة أساسية متناظرة للعنصر e .

- إن هذه المبرهنة غير صحيحة من أجل الزمرة النصف طبولوجية.

دورة - مبرهنة (5):

لتكن $\{U\}$ أسرة جميع مجاورات العنصر e في زمرة طبولوجية G ، عندئذٍ من أجل أي مجموعة جزئية A من G يكون: $\bar{A}=\cap AU=\cap UA$ ← لصاقة A

- البرهان:

- ليكن $x\in\bar{A}$ (اختياري)، ولتكن $U\in\{U\}$ ، إن xU^{-1} تكون مجاورة للعنصر x ومنه $xU^{-1}\cap A\neq\emptyset$ (حسب تعريف اللصاقة) ⇐ يوجد a بحيث: $a\in xU^{-1}\cap A$ ⇐

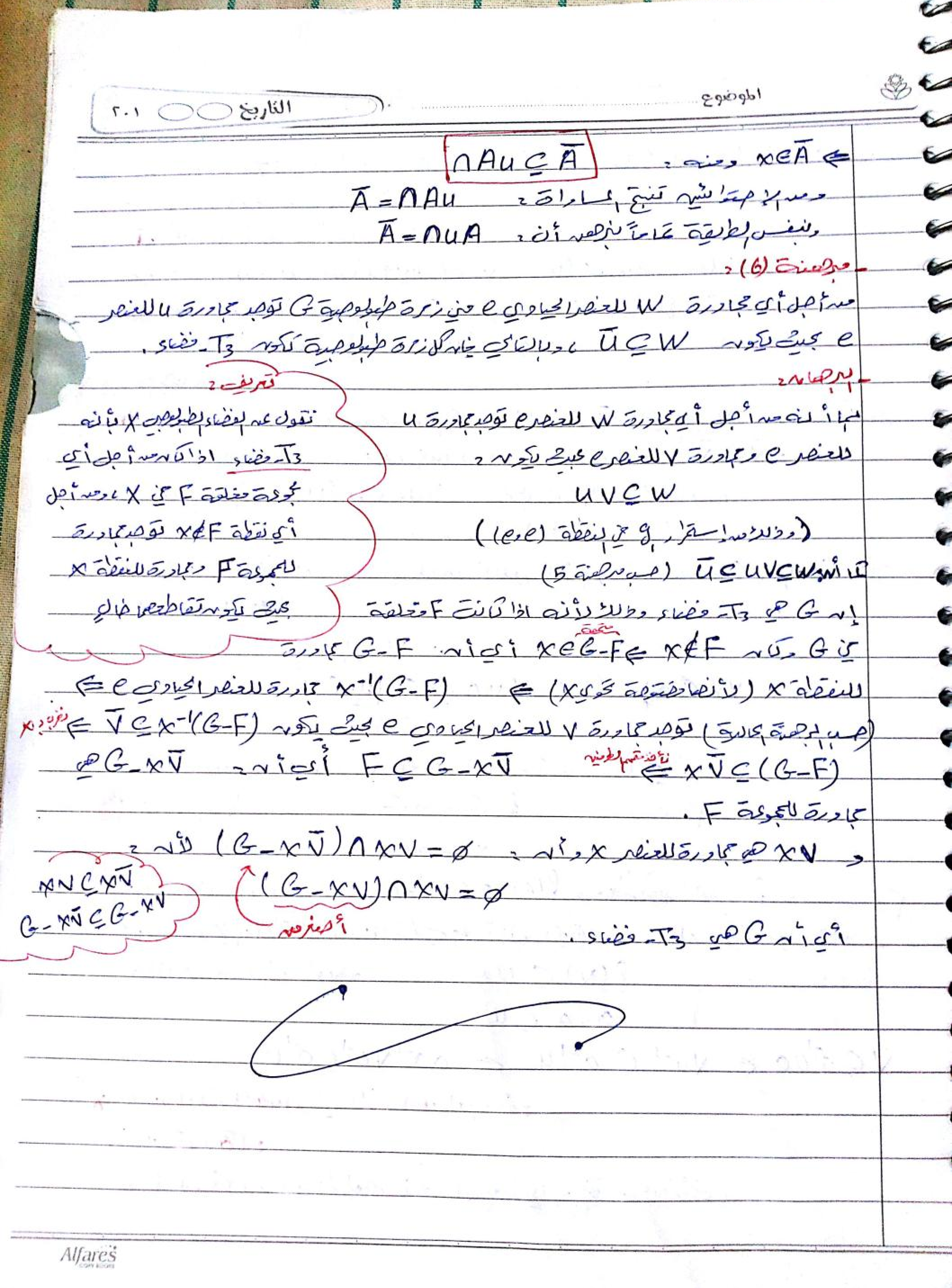
$a\in xU^{-1}$ و $a\in A$ ⇐ $x^{-1}a\in U^{-1}$ ⇐ (المقلوب) $a^{-1}x\in U$ ⇐

$x=aa^{-1}x\in aU\subseteq AU$ أي أن $x\in AU$ وذلك مهما تكن $U\in\{U\}$ ⇐

أي: $x\in\cap AU$ ، $\bar{A}\subseteq\cap AU$

بالعكس: لتكن $x\in\cap AU$ ⇐ $x\in AU$ وذلك من أجل أي $U\in\{U\}$.

ومن أجل أي مجاورة مفتوحة P للنقطة x فإن $P^{-1}x$ تكون مجاورة مفتوحة للعنصر الحيادي e ومنه: $x\in AP^{-1}x$ (لأن $P^{-1}x\in\{U\}$) ⇐ يوجد $a\in A$ و $p\in P$ بحيث يكون: $x=ap^{-1}x$ ⇐ $ap^{-1}=e$ ⇐ $a=p$ ⇐ $A\cap P\neq\emptyset$



⇐ $x \in \bar{A}$ ومنه: $\boxed{\cap A_u \subseteq \bar{A}}$

ومن المتباينتين تنتج المساواة: $\bar{A} = \cap A_u$

وبنفس الطريقة تماماً نبرهن أن: $\bar{A} = \cap uA$

- مبرهنة (6):

من أجل أي مجاورة W للعنصر الحيادي e من زمرة طبولوجية G توجد مجاورة u للعنصر e بحيث يكون $\bar{U} \subseteq W$ ، وبالتالي فإن كل زمرة طبولوجية تكون T_3 - فضاء.

- البرهان:

بما أنه من أجل أي مجاورة W للعنصر e توجد مجاورة u للعنصر e ومجاورة V للعنصر e بحيث يكون:

$uV \subseteq W$

(وذلك من استمرار g في النقطة (e,e))

لكن $\bar{U} \subseteq uV \subseteq W$ (حسب مبرهنة 5)

إن G هي T_3 - فضاء وذلك لأنه اذا كانت F مغلقة في G وكان $x \notin F \Rightarrow x \in G-F$ مفتوحة أي أن G-F مجاورة للنقطة x (لأنها مفتوحة تحويه) ⇐ $x^{-1}(G-F)$ مجاورة للعنصر الحيادي e ⇐ (حسب المبرهنة السابقة) توجد مجاورة V للعنصر الحيادي e بحيث يكون $\bar{V} \subseteq x^{-1}(G-F)$ ⇐ (نضرب بـ x) $x\bar{V} \subseteq (G-F)$ ⇐ (نأخذ متمم الطرفين) أي أن: $F \subseteq G - x\bar{V}$ أي: $G - x\bar{V}$ هي مجاورة للمجموعة F.

و xV هي مجاورة للعنصر x وأن: $(G - x\bar{V}) \cap xV = \emptyset$ لأن:

$(G-xV) \cap xV = \emptyset$ (أي صفرية)

$xV \subseteq x\bar{V}$

$G - x\bar{V} \subseteq G - xV$

أي أن G هي T_3 - فضاء.

تعريف: نقول عن الفضاء الطبولوجي X بأنه T_3 - فضاء اذا كان من أجل أي مجموعة مغلقة F في X، ومن أجل أي نقطة $x \notin F$ توجد مجاورة للمجموعة F ومجاورة للنقطة x بحيث يكون تقاطعهما خالياً.